Opción A

Ejercicio 1 opción A, Suplente Septiembre 2017 (modelo 1)

Se considera la función f dada por $f(x) = \dfrac{-3x^2+2}{x-1}$ para $x \neq 1$.

a) [1'5 puntos] Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de f.
b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

Solución

Se considera la función f dada por $f(x) = \dfrac{-3x^2+2}{x-1}$ para $x \neq 1$.

a)
Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de f.

Sabemos que x = a es una asíntota vertical (A.V.) de f(x) si $\lim_{x\to a^+} [\,(f(x)\,] = \infty$

Como $\lim_{x\to 1^-}\left(\dfrac{-3x^2+2}{x-1}\right) = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty$; la recta **x = 1** es una A.V. de f(x).

Posición relativa $\lim_{x\to 1^+}\left(\dfrac{-3x^2+2}{x-1}\right) = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$

Como la función f es un cociente de funciones polinómicas, con el grado del numerador una unidad más que el grado del denominador, f(x) tiene una asíntota oblicua (A.O.) de la forma $y = mx + n$ con $m = \lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)$ y $n = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right)$, y es la misma en $+\infty$ y en $-\infty$. Como hay A.O en $\pm\infty$, f no tiene asíntotas horizontales (A.H.) en $\pm\infty$.

También se puede calcular la A.O. dividiendo numerador entre denominador y la A.O. es el cociente de la división entera.
Lo vamos a realizar por división

$-3x^2+2$	$x-1$
$3x^2-3x+2$	$-3x-3$
$0 \quad -3x+2$	
$3x-3$	
-1	

La A.O. de f(x) es **y = -3x - 3** en $\pm\infty$.
Veámoslo también con límites.

$$m = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-3x^2+2}{x\cdot(x-1)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-3x^2+2}{x^2-x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-3x^2}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty}(-3) = -3$$

$$n = \lim_{x\to\infty}(f(x)-mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-3x^2+2}{x-1} - (-3x)\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-3x^2+2+3x^2-3x}{x-1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-3x+2}{x-1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-3x}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}(-3) = -3$$

Efectivamente la A.O. de f(x) era **y = -3x - 3** en $\pm\infty$.

Como $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-3x^2+2}{x-1} - (-3x-3)\right) = 0^-$, f(x) está por debajo de la A.O. en $+\infty$ (le damos a x el valor + 100)

Como $\lim_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-3x^2+2}{x-1} - (-3x-3)\right) = 0^+$, f(x) está por encima de la A.O. en $-\infty$ (le damos a x el valor - 100)

Si hay es este caso A.O no hay asíntotas horizontales (A.H.)

b)
Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

Me están pidiendo la monotonía, que es el estudio de f '(x)

$f(x) = \dfrac{-3x^2+2}{x-1}$

$$f'(x) = \frac{-6x\cdot(x-1) - (-3x^2+2)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-6x^2+6x+3x^2-2}{(x-1)^2} = \frac{-3x^2+6x-2}{(x-1)^2}.$$

Si f '(x) = 0 $\rightarrow$ $-3x^2 + 6x - 2 = 0 \rightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{36-24}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{12}}{6}$

Las soluciones son $x = 1 - \frac{\sqrt{12}}{6} \cong 0'423$ y $x = 1 + \frac{\sqrt{12}}{6} \cong 1'577$, que serán los posibles extremos relativos.

Como f '(0) = -2/(+) < 0, luego f(x) es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en $(-\infty, 1 - \frac{\sqrt{12}}{6})$

No tomo x = 1, porque hemos visto que era una A.V. y en x = 1 no existe la función f.

Como f '(1'5) = 0'25/(+) > 0, luego f(x) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(1 - \frac{\sqrt{12}}{6}, 1 - \frac{\sqrt{12}}{6}) - \{1\}$

Como f '(2) = -2/(+) < 0, luego f(x) es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en $(1 + \frac{\sqrt{12}}{6}, +\infty)$

Por definición en $x = 1 - \frac{\sqrt{12}}{6}$ hay un mínimo relativo que vale $f(1 - \frac{\sqrt{12}}{6})$.

Por definición en $x = 1 + \frac{\sqrt{12}}{6}$ hay un máximo relativo que vale $f(1 + \frac{\sqrt{12}}{6})$.

Ejercicio 2 opción A, Suplente Septiembre 2017 (modelo 1)

Sea f la función definida como f(x) = (x+2)·ln(x) para x > 0, donde ln(x) representa al logaritmo neperiano de x.

a) [1'75 puntos] Calcula $\int f(x)dx$

b) [0'75 puntos] Encuentra la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (1,0).

Solución

a)

Calcula $\int f(x)dx$

Es una integral por partes $\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$

$$F(x) = \int (x+2)\cdot\ln(x)dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = (x+2)dx \quad \Rightarrow v = \int (x+2)dx = \frac{x^2}{2} + 2x \end{array} \right\} = \ln(x)\cdot\left(\frac{x^2}{2} + 2x\right) - \int \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\cdot\frac{dx}{x} =$$

$$= \ln(x)\cdot\left(\frac{x^2}{2} + 2x\right) - \int\left(\frac{x}{2} + 2\right)\cdot dx = \ln(x)\cdot\left(\frac{x^2}{2} + 2x\right) - \frac{x^2}{2\cdot 2} - 2x + K = \ln(x)\cdot\left(\frac{x^2}{2} + 2x\right) - \frac{x^2}{4} - 2x + K$$

La primitiva pedida es $F(x) = \ln(x)\cdot\left(\frac{x^2}{2} + 2x\right) - \frac{x^2}{4} - 2x + K$

b)

Encuentra la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (1,0).

Como la primitiva $F(x) = \ln(x)\cdot\left(\frac{x^2}{2} + 2x\right) - \frac{x^2}{4} - 2x + K$ pasa por el punto (1,0) tenemos:

$$F(1) = 0 \;\rightarrow\; F(1) = \ln(1)\cdot\left(\frac{1^2}{2} + 2(1)\right) - \frac{1^2}{4} - 2(1) + K = 0 \;\rightarrow\; 0 - 1/4 - 2 + K = 0 \;\rightarrow\; K = 1/4 + 2 = 9/4.$$

La primitiva, pedida, que pasa por el punto (1,0) es $F(x) = \ln(x)\cdot\left(\frac{x^2}{2} + 2x\right) - \frac{x^2}{4} - 2x + \frac{9}{4}$.

Ejercicio 3 opción A, Suplente Septiembre 2017 (modelo 1)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) [0'75 puntos] Calcula BM.

b) [1 punto] Razona si el sistema dado por AX = B tiene solución o no y, en caso afirmativo, cuántas soluciones tiene.
c) [0’75 puntos] Resuelve AX = B.

Solución

a)

Calcula $BM = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

b)

Razona si el sistema dado por AX = B tiene solución o no y, en caso afirmativo, cuántas soluciones tiene.

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Sabemos que el sistema AX = B tiene solución si rango(A) = rango(A*)

$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F_2-2\cdot F_1 \\ F_3+F_1 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, con la cual el rango de A es uno, pues al triangular la matriz A solo me ha quedado una fila con números distinto de cero.

$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F_2-2\cdot F_1 \\ F_3+F_1 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, con la cual el rango de A* es uno, pues al triangular la matriz A* solo me ha quedado una fila con números distinto de cero.

Como, rango(A) = rango(A*) = 1 < número de incógnitas, el **sistema es compatible e indeterminado, y tiene infinitas soluciones.**

c)

Resuelve AX = B.

Como hemos visto antes rango(A) = rango(A*) = 1, por tanto el sistema tiene una sola ecuación y una incógnita principal.

$-x + y + 2z = 1$, es decir $y = 1 + x - 2z$. Tomando $x = \lambda \in \mathbb{R}$ y $z = \mu \in \mathbb{R}$, **las infinitas soluciones del sistema son $(x,y,z) = (\lambda, 1 + \lambda - 2\mu, \mu)$ con $\lambda, \mu \in$ R.**

Ejercicio 4 opción A, Suplente Septiembre 2017 (modelo 1)

Considera las rectas dadas por $r \equiv \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = \quad t \\ z = 2 \end{cases}$.

a) [1’75 puntos] Determina la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y a s.
b) [0’75 puntos] Halla la distancia entre las rectas r y s.

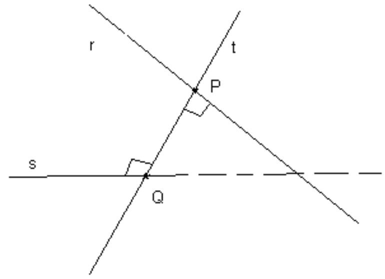
Solución

Considera las rectas dadas por $r \equiv \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = \quad t \\ z = 2 \end{cases}$.

a) y b)

Determina la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y a s, y la distancia entre ellas

Recordamos que la distancia entre dos rectas que se cruzan r(A;u) y s(B;v) es la mínima distancia entre ellas. Es decir la distancia entre los puntos de corte P y Q de la recta perpendicular a ambas y que las corta. (Por este método podemos calcular la recta perpendicular a dos rectas y que las corte)



Vamos a calcular los puntos P de “r” y Q de “s”, que se encuentran a la mínima distancia, que son los puntos de corte de la recta perpendicular común con dichas rectas.
Ponemos ambas recta en paramétricas con un parámetro distinto
De la recta r(A;**u**) tomamos un punto genérico P (depende del parámetro λ)
De la recta s(B;**v**) tomamos un punto genérico Q (depende del parámetro t)
El vector **PQ** tiene que ser perpendicular al vector director **u** de “r” y al vector director **v** de “s”, a la vez, es decir sus productos escalares tienen que ser cero:
PQ•u = 0
PQ•v = 0. Resolvemos el sistema.
Esto es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (λ y t), al resolverlo obtenemos λ y t.
Entrando en el punto genérico P con el valor de λ, obtenemos el punto P determinado.
Entrando en el punto genérico Q con el valor de t, obtenemos el punto Q determinado.
La recta pedida “t” es la que pasa por los puntos P y Q, es decir t(P;**PQ**)

De esta construcción, tenemos la definición de la distancia entre dos rectas que se cruzan, puesto que los puntos P y Q son los que se encuentran a mínima distancia entre ellas.
Calculados los punto P y Q anteriores tenemos d(r;s) = d(P;Q) = ||**PQ**||

De la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$, tomo x = $\lambda \in$ R con lo cual $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ y la recta $s \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}$.

Ponemos ambas recta en paramétricas o en forma vectorial con un parámetro distinto.

Un punto A de “r” es A(0,1,1) y un vector director es **u** = (1,1,1).
Un punto B de “s” es B(1,0,2) y un vector director es **v** = (-1,1,0).

De la recta r(A;**u**) tomamos un punto genérico P(x,y,z) = P(λ, 1+λ,1+λ)
De la recta s(B;**v**) tomamos un punto genérico Q(x,y,z) = Q(1-t, t, 2)

El vector **PQ** tiene que ser perpendicular al vector director de “r” **u** y al vector director de “s” **v** a la vez, es decir su producto escalar (•) tiene que ser cero:
PQ = (1 - t - λ, t - 1 - λ, 2 - 1 - λ) = (1 - t - λ, -1 + t - λ, 1 - λ)
PQ•u = 0 = (1 - t - λ, -1 + t - λ, 1 - λ)•(1,1,1) = 0 = 1 - t - λ -1 + t - λ + 1 - λ = 1 - 3λ = 0 $\rightarrow$ λ = 1/3.
PQ•v = 0 = (1 - t - λ, -1 + t - λ, 1 - λ)•(-1,1,0) = 0 = -1 + t + λ -1 + t - λ = -2 + 2t = 0 = -1 + t = 0 $\rightarrow$ t = 1

Ya tenemos los valores de “t” y “λ”.
Entrando en el punto genérico P con el valor de λ = 1/3, obtenemos el punto P determinado que es P((1/3), 1 + (1/3),1 + (1/3)) = P(1/3, 4/3, 4/3)

Entrando en el punto genérico Q con el valor de t = 1, obtenemos el punto Q determinado que es Q(1 - (1), (1), 2) = Q(0, 1, 2)

La recta perpendicular a ambas pedida “t” es la que pasa por los punto P y Q, es decir t(Q;**PQ**)

Q(0, 1, 2)
PQ = (0 - (1/3), 1 - (4/3), 2 - (4/3)) = (-1/3, -1/3, 2/3). Otro vector sería el **w** = (1,1,-2)

La recta pedida es t ≡ (x,y,z) = (0, 1, 2) + δ(1, 1, -2) con $\delta \in$ R.

Calculamos la distancia entre “r” y “s”

Por la construcción los puntos P y Q son los que están a la mínima distancia entre ellas, es decir los del corte perpendicular de la recta "t" con ambas rectas, luego la distancia entre las rectas "r" y "s" es:

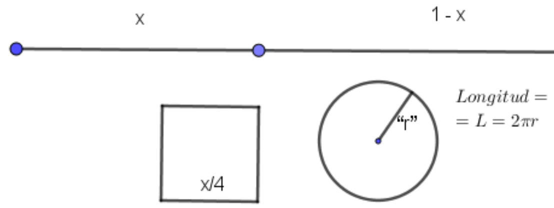
d(r;s) = ||QP|| = $\sqrt{(1/3)^2+(1/3)^2+(2/3)^2}\ u^1$ **=** $\sqrt{6/9}\ u^1 = \sqrt{2/3}\ u^1$**.**

Opción B

Ejercicio 1 opción B, Suplente Septiembre 2017 (modelo 1)

[2,5 puntos] Una cuerda de un metro de longitud se divide en dos trozos con los que se construyen un cuadrado y una circunferencia respectivamente.
Determina, si es posible, las longitudes de los trozos para que la suma de las áreas sea mínima.

Solución



Es un problema de optimización.

El área del cuadrado es $S_1 = (x/4)^2 = x^2/16$
La longitud de la circunferencia es $L = 2\pi r = 1 - x$, de donde $r = (1-x)/2\pi$, y por tanto el área del círculo es $S_2 = \pi r^2 = \pi[(1-x)/2\pi]^2 = (1/4\pi)(x^2 - 2x + 1)$

La función a optimizar es la suma de las áreas
$S(x) = S_1 + S_2 = x^2/16 + (1/4\pi)(x^2 - 2x + 1) = (1/16\pi)(\pi x^2 + 4x^2 - 8x + 4)$

Calculamos la 1ª derivada S '(x), la igualamos a 0, calculamos la 2ª derivada para ver que efectivamente es un mínimo.
$S'(x) = (1/16\pi)(2\pi x + 8x - 8)$
$S'(x) = 0$, de donde $(2\pi x + 8x - 8) = 0$, y resolviéndolo sale $x = 4/(\pi+4)$, que será el posible mínimo.

$S''(x) = (1/16\pi)(2\pi + 8)$, de donde $S''(4/(\pi+4)) = (1/16\pi)(2\pi + 8) > 0$, por tanto $x = 4/(\pi+4)$ es un mínimo.

Los trozos en que se ha dividido el alambre tienen de longitud "x" = $4/(\pi+4)$ m. y "1 – x" = $1 - 4/(\pi+4) =$
$= \pi/(\pi+4)$ m., para que las sumas de las áreas sea mínima.

Ejercicio 2 opción B, Suplente Septiembre 2017 (modelo 1)

a) [2 puntos] Halla $\int \frac{x^2}{(1+x)^{3/2}}dx$ (sugerencia $t = 1 + x^3$).

b) [0'5 puntos] Halla la primitiva cuya gráfica pasa por (2,0).

Solución

a)

Halla $\int \frac{x^2}{(1+x)^{3/2}}dx$ (sugerencia $t = 1 + x^3$).

Una primitiva es $F(x) = \int \frac{x^2}{(1+x^3)^{3/2}}dx = \left\{ \begin{array}{l} 1+x^3 = t \\ 3x^2dx=dt \\ x^2dx=dt/3 \end{array} \right\} = \int \frac{dt/3}{t^{3/2}} = \int \frac{t^{-3/2}dt}{3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^{-3/2+1}}{-3/2+1} + K = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^{-1/2}}{-1/2} + K =$,

$= \frac{-2}{3\cdot t^{1/2}} + K = \frac{-2}{3\sqrt{t}} + K = \left\{ \begin{array}{l} \text{Quito cambio} \\ 1+x^3 = t \end{array} \right\} = \frac{-2}{3\sqrt{1+x^3}} + K$

b)
Halla la primitiva cuya gráfica pasa por (2,0).

La primitiva es $F(x) = \frac{-2}{3\sqrt{1+x^3}} + K$, como pasa por (2,0) tenemos F(2) = 0, es decir $\frac{-2}{3\sqrt{1+2^3}} + K = 0$, de donde -2/9 + K = 0, luego K = 2/9 y la primitiva pedida es $F(x) = \dfrac{-2}{3\sqrt{1+x^3}} + \dfrac{2}{9}$

Ejercicio 3 opción B, Suplente Septiembre 2017 (modelo 1)

Considera el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x + ky = 1 \\ 2x - y + kz = 1 \\ x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$ del que se sabe que para un cierto valor de k es compatible indeterminado.

a) [1'5 puntos] Determina el valor de k.
b) [1 punto] Resuelve el sistema para k = 1.

Solución

Considera el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x + ky = 1 \\ 2x - y + kz = 1 \\ x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$ del que se sabe que para un cierto valor de k es compatible indeterminado.

a)
Determina el valor de k.

Matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 3 & k & 0 \\ 2 & -1 & k \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 3 & k & 0 & 1 \\ 2 & -1 & k & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Sabemos que si rango(A) = rango(A*) < 3 = número de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado, y tiene infinitas soluciones.

En A, $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 3 & k & 0 \\ 2 & -1 & k \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = 3\cdot(-2 + 3k) - (k)\cdot(4 - k) = k^2 + 5k - 6$.

De $\det(A) = 0 \rightarrow k^2 + 5k - 6 = 0$, de donde k = -6 y k = 1

Si $k \neq -6$ y $k \neq 1$, $\det(A) \neq 0$, rango(A) = rango(A*) = 3 = número de incógnitas, **sistema compatible y determinado, solución única.**

Si m = -6, $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 2 & -1 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -6 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} -6 & 0 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} = 36 - 0 = 36 \neq 0$, rango(A) = 2.

En A* como $\begin{vmatrix} -6 & 0 & 1 \\ -1 & -6 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_1 + 6\cdot C_3 \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & -6 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = (1)(10+18) = 28 \neq 0$, rango(A*) = 3.

Como **rango(A) = 2 $\neq$ rango(A*) = 3**, el **sistema es incompatible y no tiene solución**.

Si m = 1, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$, rango(A) = 2.

En A* como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_1 - C_3 \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = (1)(-4+4) = 0$, rango(A*) = 2.

Como **rango(A) = rango(A*) = 2** < número de incógnitas, el **sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones**, más de una.

Luego el valor de "k" para que el sistema sea indeterminado es k = 1.

b)
Resuelve el sistema para k = 1.

Hemos visto en el apartado (a) que si k = 1, *rango(A) = rango(A*) = 2* < número de incógnitas, *el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones*

Como rango = 2, tomamos dos ecuaciones (1ª y 2ª) y dos incógnitas principales:

$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$ (F_1+F_2) $\approx \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 5x + z = 2 \end{cases}$, tomando $x = \lambda \in R$ tenemos $y = 1 - 3\lambda$ y $z = 2 - 5\lambda$, **las infinitas soluciones para k = 1 son: (x,y,z) = (λ, 1 - 3λ, 2 - 5λ) con λ ∈ R.**

Ejercicio 4 opción B, Suplente Septiembre 2017 (modelo 1)

Considera los puntos A(1,3,−1) y B(3,−1,−1).

a) [1’75 puntos] Determina la ecuación del plano respecto del cual B es el simétrico de A.

b) [0’75 puntos] Siendo C(5,1,5), calcula el área del triángulo de vértices A,B y C.

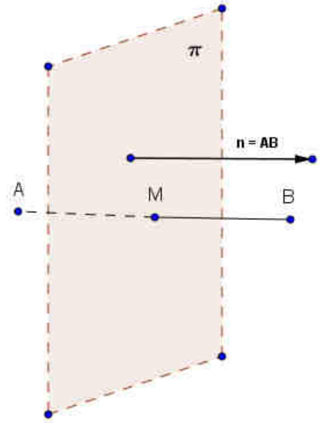
Solución

Considera los puntos A(1,3,−1) y B(3,−1,−1).

a)

Determina la ecuación del plano respecto del cual B es el simétrico de A.

El plano π que nos piden pasa por el punto medio del segmento AB y tiene vector normal el **AB**, es decir nos piden el plano mediador del segmento AB.



AB = (2,-4,0). Otro vector normal sería **n** = (1,-2,0).

El punto medio del segmento AB es M((1+3)/2,(3-1)/2,(-1-1)/2) = M(2,1,-1).

Un plano paralelo a π es $x - 2y + K = 0$, como $M \in \pi \rightarrow (2) - 2\cdot(1) + K = 0$, de donde K = 0 y **el plano pedido es $\pi \equiv x - 2y = 0$.**

b)

Siendo C(5,1,5), calcula el área del triángulo de vértices A,B y C. A(1,3,−1) y B(3,−1,−1).

Sabemos que el área de un triángulo ABC es la mitad del área del paralelogramo que determinan su lados AB y AC, es decir la mitad del módulo (|| ||) del vector producto vectorial (x) de los vectores **AB** y **AC**, luego el Área del triángulo es = (1/2)·||**AB**x**AC**||.

AB = (2,-4,0); **AC** = (5-1, 1-3, 5-(-1)) = (4, -2, 6).

$$\mathbf{AB}\times\mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -4 & 0 \\ 4 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-24 - 0) - \mathbf{j}(-12 - 0) + \mathbf{k}(-4 + 16) = (-24,12,12)$$

$||\mathbf{AB}\times\mathbf{AC}|| = \sqrt{(24)^2+(12)^2+(12)^2} = \sqrt{864} = 12\sqrt{6}$

Área del triángulo es = (1/2)·||**AB**x**AC**|| = $\mathbf{(1/2)\cdot 12\sqrt{6}\ u^2 = 6\sqrt{6}\ u^2}$